



---

## OSCILLATIONS OF A CYLINDRICAL SHELL IN CONTACT WITH A VISCOUS FLUID

Butunov Jakhongir Ruziqulovich

Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Tashkent Institute of  
Chemical Technology,  
jaxongir.butunov@gmail.com

Karimova Sanobar Toyboyevna

Senior Lecturer, Department of “Physics and Energy,” Faculty of Oil and Gas  
Technologies, Tashkent Institute of Chemical Technology,  
sanobarkarimova1974@gmail.com

Mirzoyeva Gulzira Toraqul qizi

Assistant Lecturer, Department of Exact Sciences, Bukhara State Technical  
University; PhD Student, gmirzoyeva@bstu.uz

---

### Abstract

The paper considers the three-dimensional diffraction of impulsive longitudinal waves by a cylindrical cavity. The cavity is embedded in an unbounded, isotropic, homogeneous elastic medium. It is assumed that a point source of longitudinal waves generating the incident impulse is located outside the cavity. A formal solution to the problem is obtained in integral form. A general algorithm is presented for computing Bessel and Hankel functions with complex arguments, as well as algorithms based on Müller’s method for determining residues and Romberg’s method for evaluating improper integrals. In a cylindrical coordinate system, a dissipative system consisting of a cylindrical body is considered. All systems examined in this work are assumed to be homogeneous and isotropic.

**Keywords:** Diffraction, longitudinal waves, elastic medium, Müller’s method, cylindrical body.



---

**QOVUSHQOQ SUYUQLIK BILAN KONTAKTDA BO‘LGAN  
SILINDRIK QOBIQ TEBRANISHLARI**

Butunov Jaxongir Ruziqulovich

Toshkent kimyo- texnologiya instituti, Oliy matematika kafedrasida katta  
o‘qituvchi, jaxongir.butunov@gmail.com

Karimova Sanobar To‘yboyevna

Toshkent kimyo- texnologiya instituti, Neft va gaz texnologiyalari fakulteti  
“Fizika va energetika” kafedrasida katta o‘qituvchi,  
sanobarkarimova1974@gmail.com

Mirzoyeva Gulzira To‘raqul qizi

Buxoro davlat texnika universiteti aniq fanlar  
kafedrasida assistenti, tayanch doktoranti  
gmirzoyeva@bstu.uz

**Annotatsiya:**

Ishda silindrik bo‘shliqdagi impulsli uzunlamas to‘lqinlarning uch o‘lchamli difraksiyasi ko‘rib chiqiladi. Bo‘shliq cheksiz, izotrop va bir jinsli elastik muhitga joylashtirilgan deb qabul qilinadi. Tushuvchi impulsni hosil qiluvchi uzunlamas to‘lqinlarning nuqtaviy manbai bo‘shliqdan tashqarida joylashgan deb faraz qilinadi. Masalaning formal yechimi integral ko‘rinishda olingan. Kompleks argumentli Bessel va Hankel funksiyalarini hisoblash uchun umumiy algoritmi, shuningdek, qoldiqlarni topish uchun Myuller usuli va noshar’iy integrallarni hisoblash uchun Romberg usuli algoritmlari keltiriladi. Silindrik koordinatalar sistemasida silindrik jismdan iborat dissipativ sistema berilgan deb qaraladi. Mazkur ishda ko‘rib chiqiladigan barcha sistemalar bir jinsli va izotrop deb qabul qilinadi.

**Kalit so‘zlar:** difraksiya, uzunlamas to‘lqinlar, elastik muhit, Myuller usuli, silindrik jism.



---

## КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

### **Аннотация:**

В работе рассматривается трёхмерная дифракция импульсных продольных волн на цилиндрической полости. Полость помещена в безграничную, изотропную, однородную упругую среду. Предполагается, что точечный источник продольных волн, генерирующий падающий импульс, находится вне полости. Формальное решение задачи получено в интегральной форме. Приводится общий алгоритм для вычисления функции Бесселя и Ханкеля комплексного аргумента, а также приводятся алгоритмы метода Мюллера для нахождения вычетов и Ромберга для вычисления несобственных интегралов. Пусть в цилиндрической системе координат дана диссипативная система, состоящая из цилиндрического тела. Все системы, которые рассматриваются в настоящей работе, являются однородными и изотропными.

**Ключевые слова:** дифракция, продольных волн, упругая среда, метода Мюллера, цилиндрического тела.

### **1. Введение**

В работах [1,2] представлен длинноволновой и низкочастотный анализ динамического поведения длинного непрерывного трубопровода, погруженного в упругую среду. С использованием оболочечной модели трубы показано, что динамическое усиление осевых и кольцевых напряжений, возникающих в трубе под действием бегущих плоских волн (продольных и сдвиговых), существенно зависит от соотношения жёсткостей окружающего грунта и трубы [3,4]. Представлены результаты, демонстрирующие зависимость индуцируемых напряжений от направления распространения падающих волн, коэффициентов Пуассона и жёсткостей материалов грунта и трубы. В работе [5,6] рассмотрены исследования динамического поведения подземных трубопроводов, проведенные за последние несколько десятилетий. Было включено девять тем:



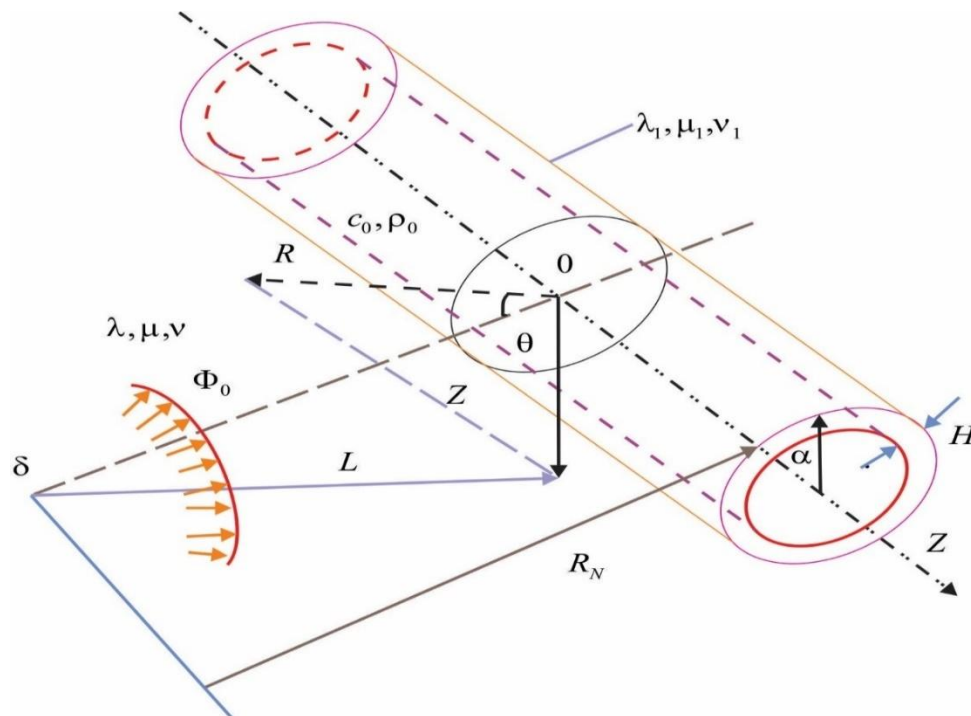
теоретическая оценка сейсмического отклика подземных трубопроводов, моделирование взаимодействия грунт-конструкция, жидкость-грунт-труба для подземных трубопроводов, анализ сейсмического отклика трубопровода из-за постоянной деформации грунта, сейсмический отклик трубопроводов, проходящих через зоны разжижения, конечно-элементный анализ подземных трубопроводов, экспериментальные исследования сейсмического отклика подземных трубопроводов, оценка сейсмического ущерба, сейсмическое поведение трубопроводных сетей и сейсмические характеристики стыков и изгибов [7,8]. Было обнаружено, что все больше исследований основываются на конечно-элементном анализе, учитывая, что компьютерные технологии хорошо развиты, а конечно-элементный анализ гораздо менее затрачен, чем эксперименты [9,10]. Хотя типичные повреждения во время землетрясений вызваны эффектом распространения волн, наиболее серьёзные повреждения возникают из-за постоянного смещения грунта, например, смещения по разломам. Были рассмотрены исследования трубопроводов, подверженных смещению по разломам, но было обнаружено лишь несколько оценок сейсмического ущерба, посвящённых повреждениям, вызванным смещением по разломам. упругую среду, в диапазоне длинных волн и низких частот [11,12]. С использованием оболочечной модели трубы показано, что динамическое усиление осевых и кольцевых напряжений, возникающих в трубе под действием бегущих плоских волн (продольных и сдвиговых), существенно зависит от соотношения жёсткостей окружающего грунта и трубы. Представлены результаты, демонстрирующие зависимость индуцируемых напряжений от направления распространения падающих волн, коэффициентов Пуассона и жёсткостей материалов грунта и трубы [13,14]. Труба была смоделирована как тонкая цилиндрическая оболочка из линейного однородного изотропного упругого материала, помещенная в линейную изотропную однородную упругую среду бесконечной протяженности. Были тщательно изучены характеристики отклика трубы, вызванные изменениями свойств материала окружающей среды.

## 2. Постановка задачи и методы решения

Пусть бесконечно длинная вязкоупругая цилиндрическая оболочка радиуса  $R$ , толщиной  $h_0$ , плотности  $\rho_0$ , коэффициента Пуассона  $\nu_0$ , заполнена вязкой жидкостью (рис.1). Тогда движение оболочки под нагрузкой (с плотностью  $p_1, p_2, p_n$ ) имеет вид [11]:

$$L\bar{u} - \int_0^t LR_E(t-\tau)\bar{u}(\bar{r}, \tau)d\tau = \frac{(1-\nu^2)}{E_0 h_0} [\bar{p}] + \rho_0 \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right]. \quad (1)$$

где  $\bar{u} = \bar{u}(u_r, u_\theta, u_z)$  - перемещения точек срединной поверхности.



**Рис.1. Расчетная схема**

Уравнения движения вязкой жидкости (линеаризованные) имеют вид [20]

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} - \nu^* \Delta \bar{g} + \frac{1}{\rho_0^*} \text{grad } P - \frac{\nu^*}{3} \text{grad } \text{div } \bar{g} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div } \bar{g} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial \rho^*} = a_0^2, a_0 = \text{const.}$$

$$\dot{u}_z = g_z, \dot{u}_r = g_r, \dot{u}_\theta = g_\theta, \quad (a)$$

$$q_z = -p_{rz}, q_r = -p_r, q_\theta = -p_{r\theta}.$$



$$\begin{aligned} p_{rz} &= \mu^* \left( \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial z} \right); \\ p_{rr} &= -p + \lambda^* \left( \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial z} + \frac{\mathcal{G}_r}{r} \right) + 2\mu^* \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r}; \\ p_{r\theta} &= \mu^* \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial r} - \frac{\mathcal{G}_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_r, \mathcal{G}_\theta, \mathcal{G}_z)$  - скорости частиц;  $\rho^*$  и  $P$  - плотность и давление жидкости;  $\rho_0^*$  и  $a_0$  - плотность жидкости и скорость звука в жидкости;  $\nu^*$ ,  $\mu^*$  - коэффициенты вязкости;  $\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$ ;  $p_{rz}, p_{rr}, p_{r\theta}$  - элементы тензора напряжений в жидкость,  $\{u \ v \ w\}^T$  - вектор перемещений;  $R_E(t-\tau)$  - ядро релаксации;  $E_0$  - начальное значение модуля упругости. На рис. 1 приведена расчетная схема слоистой оболочки находящейся в деформируемом полупространстве. Если все слои и окружающая среда вязкоупругие, то рассматриваемая механическая система (рис.1) называется диссипативно-однородной. Некоторые слои могут быть упругими. Тогда ядра релаксации, описывающие вязкие свойства материалов, равны нулю. Такая механическая система (рис.1) называется диссипативно-неоднородной. Основной проблемой является исследование диссипативных (демпфирующих) свойств системы в целом, а также соответствующие напряженно - деформируемые состояния цилиндрической многослойной механической системы. Если на внешнюю поверхность не действуют никакие нагрузки, то ставятся условия:

$$R = R_{k+1}; \quad \sigma_{rr(k+1)} = 0; \quad \sigma_{r\theta(k+1)} = 0; \quad \sigma_{rz(k+1)} = 0. \quad (3)$$

На рис. 1 приведена расчетная схема слоистой оболочки находящейся в деформируемом полупространстве. Многослойный цилиндр представим так:

$$0 < r_1 \leq a_1; \quad a_1 \leq r_2 \leq a_2; \dots a_{k-1} \leq r_k \leq a_k; \quad a_{n-1} \leq r_n \leq \infty \quad (k=1,2,\dots,N) \quad |z_1| < \infty$$

Для скалярного  $\varphi(r, \theta, z, t)$  и векторного  $\vec{\psi}(r, \theta, z, t)$  потенциалов используем уравнения (1). Для скалярного  $\varphi(r, \theta, z, t)$  и векторного  $\vec{\psi}(r, \theta, z, t)$  потенциалов используем уравнения (1).

## 2. Методы решения взаимодействия стационарных волн с цилиндрическими телами.

Если вектор перемещений представить в виде потенциальной и соленоидальной частей, то перемещение среды соответственно имеют вид

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}, \quad \text{rot } \vec{\psi} = 0, \quad (4)$$

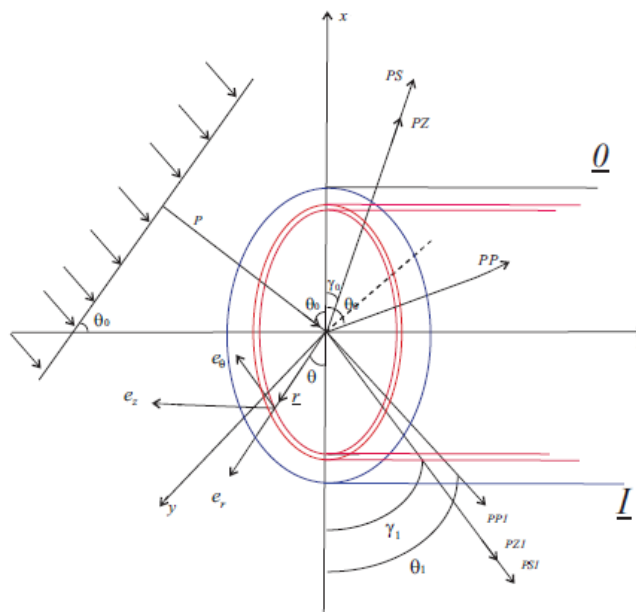
где  $\varphi$  – потенциал продольных волн;  $\vec{\psi} (\psi_t, \psi_\theta, \psi_z)$  – потенциал поперечных волн. Тогда эти потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\Delta \varphi_k - \frac{1}{c_{pj}^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \psi_{zk} - \frac{1}{c_{sj}^2} \frac{\partial^2 \psi_{zk}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \psi_{rk} - \frac{\psi_{rk}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial \theta} - \frac{1}{c_{sk}^2} \frac{\partial^2 \psi_{rk}}{\partial t^2} = 0;$$

$$\Delta \psi_{\theta k} - \frac{\psi_{\theta k}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_{rk}}{\partial \theta} - \frac{1}{c_{sk}^2} \frac{\partial^2 \psi_{\theta k}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (5)$$

$$u_{rk} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial z}; \quad u_{\theta k} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial r};$$

$$u_{zk} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial r} + \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{rk}}{\partial \theta}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$



**Рис. 2. Схема расчета слоистой цилиндрической конструкции, находящегося под воздействием волн под углом**



где  $\varphi(r, \theta, z, t)$  – потенциал продольных волн;  $\vec{\psi}(\psi_r, \psi_\theta, \psi_z)$  – потенциал поперечных волн;

$$c_{pk}^2 = ((\lambda_k + 2\mu_k) / \rho_k) \Gamma_k; \quad c_{sk}^2 = (\mu_k / \rho_k) \Gamma_k$$

$$\Gamma_k = 1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R).$$

Многослойный цилиндр представим так:

$$0 < r_1 \leq a_1; \quad a_1 \leq r_2 \leq a_2; \dots a_{k-1} \leq r_k \leq a_k; \quad a_{n-1} \leq r_n \leq \infty \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad |z_1| < \infty$$

Для скалярного  $\varphi(r, \theta, z, t)$  и векторного  $\vec{\psi}(r, \theta, z, t)$  потенциалов используем уравнения (1). Геометрические размеры объекта и свойства волнового движения вдоль оси OZ позволяют описывать форму колебаний, представляющих волны, распространяющиеся по оси OZ. Решения (5) будем искать так (рис.2):

$$\varphi^{(PP_k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(r) e^{i(n\theta + \frac{\omega \cos \theta_k}{C_{Pk}} z - \omega t)}, \quad \begin{pmatrix} \psi^{(PSk)} \\ \varphi^{(PZk)} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(r) e^{i(n\theta + \frac{\omega \cos \theta_k}{C_{Sk}} z - \omega t)}, \quad (6)$$

где  $n$  – целое постоянное число;  $\gamma_{pk}$  – постоянная распространения волн;

$$\omega = 2\pi f \text{ - частота; } r = \frac{r_1}{a_0}, \quad z = \frac{z_1}{a_0}.$$

Перемещения  $k$ -ой цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned} u_{rk} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \gamma_k [A_{1kn} J'_n(\gamma_{1k} r) + A_{2kn} Y'_n(\gamma_{1k} r)] + \frac{n}{r} [A_{3kn} J_n(\gamma_{2k} r) + \right. \\ \left. + A_{4kn} Y_n(\gamma_{2k} r)] - \frac{r\gamma_{2k}}{\mu_{2k}} [A_{5kn} J'_n(\gamma_{2k} r) + A_{6kn} Y'_n(\gamma_{2k} r)] \right\} e^{i(\frac{\omega \cos \theta_k}{C_{Pk}} z - \omega t)}; \quad (7) \\ u_{\phi k} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{r} \left\{ \gamma_k [A_{1kn} J_n(\gamma_{1k} r) + A_{2kn} Y_n(\gamma_{1k} r)] + \frac{r\gamma_{2k}}{n} [A_{3kn} J'_n(\gamma_{2k} r) + \right. \\ \left. + A_{4kn} Y'_n(\gamma_{2k} r)] - \frac{r}{\mu_{2k}} [A_{5kn} J_n(\gamma_{2k} r) + A_{6kn} Y_k(\gamma_{2k} r)] \right\} e^{i(\frac{\omega \cos \theta_k}{C_{Pk}} z - \omega t)}; \end{aligned}$$



$$u_{zk} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \gamma_k \left[ A_{1kn} J_n(\gamma_{1k} r) + A_{2kn} Y_n(\gamma_{1k} r) \right] + \frac{\gamma_{2k}^2}{n} \left[ A_{5kn} J_n(\gamma_{2k} r) + A_{6kn} Y_n(\gamma_{2k} r) \right] \right\} e^{i \left( \frac{\omega \cos \theta_k}{C_{pk}} z - \omega t \right)}$$

где

$$\gamma_{1k}^2 = \bar{\mu}_{1k}^2 - \gamma^2; \quad \bar{\mu}_{1k} = \frac{\omega}{a_{1k} \Gamma_k}; \quad \gamma_{2k}^2 = \bar{\mu}_{2k}^2 - \gamma^2;$$

$$\bar{\mu}_{2k} = \omega / c_{sk} \Gamma_{2k}; \quad c_{sk}^2 = \frac{\bar{\mu}_k}{\rho_k}; \quad \gamma = m\pi / l, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Для определения произвольных постоянных  $A_{1kn}, A_{2kn}, A_{3kn}, A_{4kn}, A_{5kn}, A_{6kn}$  используются граничные условия. Получим замкнутую систему однородных алгебраических уравнений порядка  $6k + 3$ . Условием существования нетривиального решения полученной системы есть равенство нулю ее главного определителя. Раскрывая полученный детерминант, получим дисперсионное уравнение. Исследуем дисперсионные характеристики, т.е., зависимости фазовых ( $C = C_R + iC_I$ ) и групповых скоростей  $V = V_R + iV_I$  в зависимости от волнового числа ( $\gamma_p$ ). На основе (7) получаем

$$\Delta(C, \omega, \gamma_p, \lambda) = 0, \quad (8)$$

где  $\omega$  - частота;  $\gamma_p$  - волновое число,  $\lambda$  - длина волны.

Для решения (8) применяется метод Мюллера [12,13]. За начальные значения принимаются фазовые скорости волн соответствующей упругой задачи. Составлена программ на языке C++ . Напряженно – деформированные состояния цилиндрической оболочки, находящегося под воздействием гармонических нагрузок. Рассматривается взаимодействие сейсмических волн с цилиндрической оболочкой (рис.2). Пусть сейсмическая волна произвольного направления воздействует на цилиндрическую оболочку. Уравнения движения окружающей среды и оболочки записываются в цилиндрических координатах. На контактной поверхности оболочки со средой накладывается жесткий контакт, т.е.



равенства смещений и напряжений. Целью решения задачи- продемонстрировать влияние угла падения  $\theta_0$  на [14]. Вектор перемещений окружающей среды обозначается через  $\vec{U}_1$  с компонентами  $\{U_{r1}, U_{\theta1}, U_{z1}\}$ , а для цилиндрического слоя-  $\vec{U}_2 \{U_{r2}, U_{\theta2}, U_{z2}\}$ , и удовлетворяют уравнениям движения (5). Здесь также задача решается применением уравнений движения в потенциалах  $\varphi_i$  и  $\psi_i$ , причем они должны удовлетворять волновым уравнениям. Решение уравнения (5) при ( $i=1$ ) записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n1} \cos n\theta + A_{n2} \sin n\theta) H_n^{(1)}(\gamma_1 r) e^{i\alpha(z-ct)}, \\ \psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_{n1} \cos n\theta + B_{n2} \sin n\theta) H_n^{(1)}(\delta_1 r) e^{i\alpha(z-ct)}, \\ \chi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n1} \cos n\theta + C_{n2} \sin n\theta) H_n^{(1)}(\delta_1 r) e^{i\alpha(z-ct)}, \end{aligned} \quad (9)$$

Где  $\gamma_1 = \sqrt{\alpha^2 - K_1^2}$   $\delta_1 = \sqrt{\alpha^2 - K_2^2}$   $K_1^2 = \omega^2 / C_{p1}^2$   $K_2^2 = \omega^2 / C_{s1}^2$ ,

$K_n$  – модифицированная функция Бесселя;  $A_{n1}$ ,  $B_{n1}$   $C_{n1}$  – постоянные, определяемые из граничных условий. Теперь можно определить перемещения и напряжения среды

(10)

$$\sigma_{rr} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + e \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial z} \right) \right];$$

$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ,  $f$  – произвольная функция времени.

С учетом (1.37) перемещения и напряжения принимают вид:

$$\begin{aligned} U_{r1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} K'_n(\gamma_1 r) + B_{n1} \frac{n}{r} K_n(\delta_1 r) + e(i\alpha) C_{n1} K'_n(\delta_1 r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix}) e^{i\alpha(x-ct)} \\ U_{\theta1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n}{r} A_{n1} K_n(\gamma_1 r) - B_{n1} K'_n(\delta_1 r) - \frac{e}{r} i\alpha C_{n1} K_n(\delta_1 r) \right) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)} \end{aligned} \quad (11)$$



$$\begin{aligned}
 U_{z1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1}(i\alpha)K_n(\gamma_1 r) - eC_{n1} \left( \frac{1}{r} K'_n(\delta_1 r) + K''_n(\delta r) - \frac{n^2}{r^2} K_n(\delta r) \right) \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)}; \\
 \sigma_{rr1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1}(\lambda_r \left[ \frac{1}{r} K'_n(\gamma_1 r) + \frac{n^2}{r^2} K_n(\gamma_1 r) - \alpha^2 K_n(\gamma_1 r) \right] + 2\mu_r K''_n(\gamma r) + \right. \\
 &+ B_{n1}(\lambda_r \frac{n}{r} (1 - \frac{1}{r}) K_n(\delta_1 r) + 2\mu_r \frac{n}{r} K'_n(\delta_1 r) + \\
 &C_{n1}(\lambda_r \left[ (i\alpha e) K''_n(\delta_1 r) - i e (\frac{n^2}{r^2} \alpha + \delta_1^2) K_n(\delta_1 r) \right] + \\
 &\left. + 2\mu_r i \alpha e K'_n(\delta r) \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x \pm ct)}, \\
 \sigma_{r\theta_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n}{r} \mu_r A_{n1} \left( \frac{1}{r} \right) K_n(\gamma_1 r) K'_n(\gamma_1 r) + \frac{n\mu_r}{2r} C_{n1} (i\alpha e) \left( \frac{2}{r} K_n(\delta_1 r) - K'_n(\delta_1 r) \right) \right\} \\
 &\begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i(\omega t \pm \alpha x)}; \\
 \sigma_{rz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1} \mu_1 (i\alpha) K_n(\gamma_1 r) + B_{n1} \frac{i\alpha}{2r} \mu_1 K_n(\delta_1 r) + C_{n1} i(\alpha e - \delta^2) K'_n(\delta_1 r) \right\} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i(\omega t \pm \alpha x)}.
 \end{aligned}$$

Пусть на цилиндрический слой (оболочку) действует одна из гармонических падающих волн типа P, SH и SV. Пусть падает гармоническая волна P, тогда продольный падающий потенциал принимает следующий вид

$$\varphi^{(p)} = U_0^{(p)} \frac{1}{iK_1} e^{i\alpha(x-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} J_n(\gamma_1 r) \cos n\theta; \psi^{(p)} = \chi^{(p)} = 0. \quad (12)$$

Если падает поперечная SV-волна, тогда падающий потенциал принимают следующий вид

$$\psi^{(p)} = U_0^{(p)} \frac{1}{iK_2 \sin \theta_0} e^{i\alpha(x-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n1} J_n(\delta_1 r) \sin n\theta; \varphi^{(p)} = \chi^{(p)} = 0. \quad (13)$$

Если падает поперечная SH- волна, тогда падающий потенциал принимают следующий вид

$$\chi^{(p)} = U_0^{(p)} \frac{1}{iK_2 \sin \theta_0} e^{i\alpha(x-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n1} J_n(\delta_1 r) \cos n\theta; \varphi^{(p)} = \psi^{(p)} = 0. \quad (14)$$

Рассматривается распространение волн в диссипативных механических системах, состоящих из протяженных плоских (или цилиндрических) тел.

Решение задачи (14) находим в виде:

$$\left. \begin{aligned} \phi_k(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\alpha_k r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_p z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{rk}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{nr}(\beta_k r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_p z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{\theta k}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n\theta}(\beta_k r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_p z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{zk}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{nz}(\beta_k r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_p z} e^{-i\omega t}; \end{aligned} \right\} (15)$$

где  $n$  - целое число;  $\gamma_{pk}$  - постоянная величина распространения волн;  $\omega$  - собственная частота;  $r = \frac{r_1}{a_0}, z = \frac{z_1}{a_0}$ . На бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) ставятся

условия Зоммерфельда для каждого компонента [15]. Подставляя (15) в (5) получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 j_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj_k}{dr} + \frac{\alpha_k^2}{c_{sk}^2} - \frac{n^2 \ddot{y}_k}{r^2 \ddot{\theta}} = 0; \quad \frac{d^2 y_{zk}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy_{zk}}{dr} + \frac{\alpha_k^2}{c_{sk}^2} - \frac{n^2 \ddot{y}_{zk}}{r^2 \ddot{\theta}} = 0;$$

$$\frac{d^2 \psi_{zk}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{zk}}{dr} + \left( \beta_k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \psi_{zk} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{d^2 \psi_{\theta k}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{\theta k}}{dr} + \frac{1}{r^2} \left( -n^2 \psi_{\theta k} + 2n \psi_{\theta k} - \psi_{\theta k} \right) \beta_k^2 \psi_{\theta k} = 0;$$

$$\frac{d^2 \psi_{rk}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{rk}}{dr} + \frac{1}{r^2} \left( -n^2 \psi_{rk} + 2n \psi_{rk} - \psi_{rk} \right) \beta_k^2 \psi_{rk} = 0;$$

$$\text{где } \alpha_k^2 = \frac{\Omega_k^2}{\gamma_k^2} - \gamma_p^2; \quad \beta_k^2 = \Omega_k^2 - \gamma_p^2; \quad \Omega_k = \frac{\omega \alpha_k}{c_{sk}}; \quad \gamma_k^2 = \frac{2(1 - \nu_k)}{1 - 2\nu_k}.$$

Первые два уравнения в (16) имеют следующие решения для  $k=1$  первого (сплошного) и внешнего цилиндра ( $k=N$ ):

$$\phi_k(r) = \begin{cases} F_{nk} J_n(\alpha_k r), & k=1; \\ F'_{nk} H_n^{(1)}(\alpha_k r), & k=N; \end{cases} \quad (17)$$

$$\psi_z(r) = \begin{cases} M_{1k} J_n(\beta_k r), & k=1; \\ M'_{1k} H_n^{(1)}(\beta_k r), & k=N; \end{cases} \quad (18)$$



где  $J_n(\alpha_k r)$  - функция Бесселя  $n$  - го порядка.  $H_n^{(1)}(\beta_k r)$  - функция Ханкеля первого рода  $n$  - го порядка. Решение двух остальных уравнений в (17) выражаются также через функции Бесселя и Ханкеля :

$$\psi_{rk}(r) = \begin{cases} L_{1nk} J_{n-1}(\beta_k r) + L_{2nk} J_{n+1}(\beta_k r), & k = 1; \\ L'_{1nk} H_{n-1}^{(1)}(\beta_k r) + L'_{2nk} H_{n+1}^{(2)}(\beta_k r), & k = N; \end{cases} \quad (19)$$

Решения (17), и (18) системы дифференциальных уравнений будут содержать  $6k-2$  произвольные постоянные. Пользуясь возможностью поступить в значительной мере произвольно при выборе значений одной из постоянных, полагаем далее  $L_{1k} = L'_{1k} = 0$ , т.е.  $\psi_{rk} = \psi_{\theta k}$ . Таким образом, подставляя (17) на (18) и с учетом (19) получим дисперсионное уравнений (трансцендентные уравнение) с комплексно входящим параметром. В качестве ядра релаксации вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро  $R(t) = \frac{Ae^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}}$  Рижаница –Колтунова [12],

обладающе слабое сингулярности, где  $A, \alpha, \beta$ -параметры материалы. Примем следующие параметры:  $A = 0,048$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\alpha = 0,1$ . Корны дисперсионного уравнения решается методом Мюллера , на каждой итерации метода Мюллера применяется методом Гаусса с выделением главного элемента. Таким образом, решение дисперсионного уравнения не требует раскрытия определителя. Таким образом, после подстановки найденных перемещений и напряжений в граничное условие получаем комплексные системы неоднородных алгебраических уравнений  $4N$ -го порядка относительно неизвестных  $A_{nj}, B_{nj}, C_{nj}, L_{nj}, M_{nj}$  и  $Z_{nj}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) в виде

$$[C]\{q\} = \{P\}, \quad (20)$$

где

$$\{q\} = \{A_{n1}, B_{n1}, C_{n1}, L_{n1}, M_{n1}, Z_{n1}, \dots, A_{nN}, B_{nN}, C_{nN}, L_{nN}, M_{nN}, Z_{nN}\}^T;$$
$$\{P\} = \{P_{1N}, P_{2N}, P_{2N}, P_{3N}, \dots, 0, 0\}^T;$$

-матрица внешних нагрузок;  $[C]$ -невырожденная квадратная матрица жесткости размерности  $(4N \times 4N)$ . В дальнейшем система алгебраических уравнений (20) с комплексными коэффициентами решается методом Гаусса

с выделением главного элемента. Для решения нестационарных задач применяется метод интегральных преобразований Лапласа или Фурье.

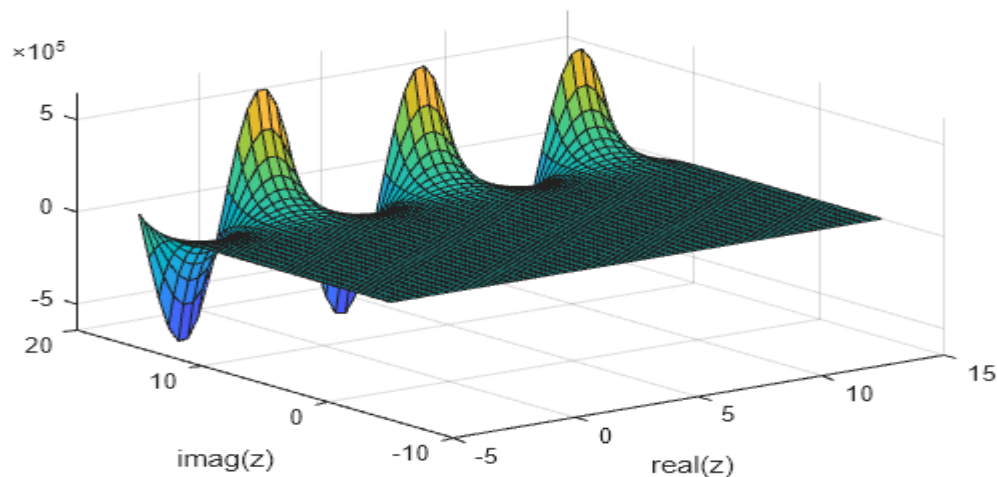


Рис. 3. График функции Ханкеля первого рода  $H_n^{(1)}(z)$  для целых порядков

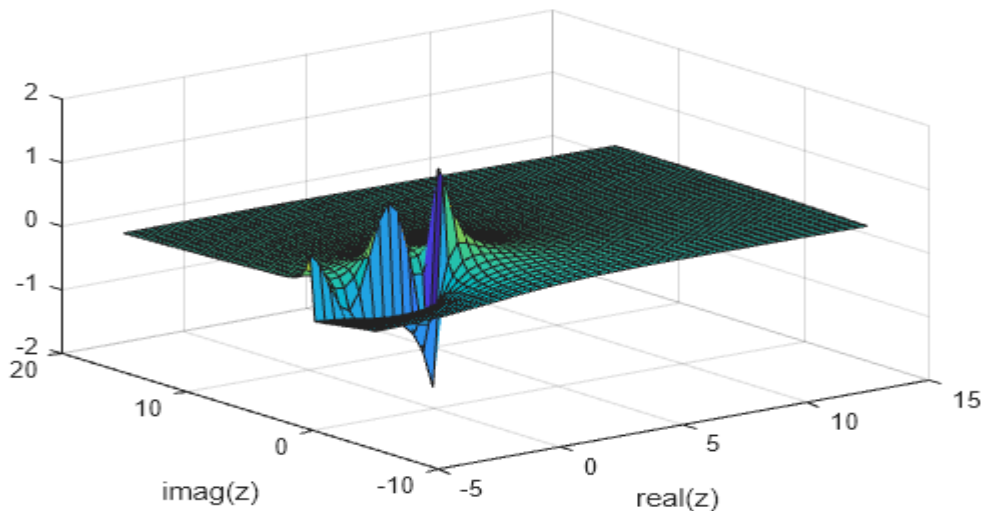


Рис. 4. График функции Ханкеля первого рода  $H_n^{(1)}(z)$  для целых порядков

Для решения системы комплексных алгебраических уравнений использован метод Гаусса с выделением главного элемента, алгоритм и программа для которой нами разработаны. Для получения конкретных результатов на ЭВМ



использованы численные значения исходных данных, которые приведены на рис.3 и рис.4. В случае  $R_\lambda(\tau) \neq 0, R_\mu(\tau) \neq 0$  принимаем в виде  $R_\lambda = R_\mu = A_1 \exp(-\beta\tau) * t^{\alpha-1}$ , где  $A_1 = 0.048; \beta = 0.05; \alpha = 0.1$  малая,  $A_1 = 0.078; \beta = 0.05; \alpha = 0.1$  большая вязкость.

### **Заключения**

При рассмотрении нестационарной задачи вместо ядра Колтунова-Ржаницина берем экспоненциальное ядро, которое не имеет особенностей при  $t=0$ . Дифракция нестационарных волн решается интегральным преобразованием Фурье. Несобственные интегралы появляющиеся при применении преобразования Фурье вычисляются с помощью метода Ромберга. При рассмотрении задачи колебаний жесткого включения, необходимо найти вычеты (полюсы) выражения данного перемещения или напряжения. Для нахождения вычетов применяется метод Мюллера.

### **Литература**

1. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волновые процессы в механическом волноводе. Основы, концепции, методы. – Германия, LAP, Lambert Academic Publishing . 2012.–220 p.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. –К.: Киевский универ. Т. – 2012. –283 с.
3. Safarov I.I., Kulmurotov N.R., Teshayev M.K., Kuldashov N.U. Interaction of Non Stationary Waves on Cylindrical Body. Applied Mathematics, 2019. 10. – P.435-447.
4. Safarov I.I., Kulmurotov N.R., Kuldashov N.U. Diffraction of Surface Harmonic Viscoelastic Waves on a Multilayer Cylinder with a Liquid. Applied Mathematics, 2019,10, -P. 468-484.
5. Safarov I.I., Boltaev Z.I. Interaction of Harmonic Waves on a Viscoelastic Cylindrical Body. Advance research Journal of Multidisciplinary Discoveries. 2019. vol. 37, issue 1, -P. 01-10. <http://www.journalresearchijf.com>
6. Шмаков, В.П. Избранные труды по гидро- упругости и динамике упругих конструкций.М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.–287 с.



- 
7. Waki Y., Mace B.R., Brennan M.J. Free and forced vibrations of a type using a wave/finite element approach. *Journal of Sound and Vibration* 323, 2009. – Pp.737-756.
  8. Sabiniarz P., Kropp W. A waveguide finite element aided analysis of the wave field on a stationary tyre, not in contact with the ground. *Journal of Sound and Vibration* 329, 2010. –P. 3041-3064.
  9. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. – М.: Машиностроение, 1983.–239 с.
  10. Safarov I.I., Tshaev M.Kh., Akhmedov M.S. Free Oscillations of a Toroidal Viscoelastic Shell with a Flowing Liquid. *American Journal of Mechanics and Applications*. 2018. 6(2): – P. 37-49 <http://www.sciencepublidoi:10.11648>
  11. Mirsaidov M.M., (2012) Dynamics of a viscoelastic plate carrying concentrated mass with account of physical nonlinearity of material. Part 1. *PNRPU Mechanics Bulletin*. Vol.7, Issue 2, 2012. – P. 143-153 **DOI:** 10.15593/perm.mech/2019.2.11
  12. Mikhasev G.I., Altenbach H. *Thin-walled Laminated Structures: Buckling, Vibrations and their Suppression.*//Cham, Switzerland: Springer. – 2019.–280p.
  13. Mikhasev G., Mlechka I., Maevskaya S. Effect of Magnetic Field on Free and Forced Vibrations of Laminated Cylindrical Shells Containing Magnetorheological Elastomers. In: Altenbach H., Carrera E., Kulikov G. (eds) *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems. Advanced Structured Materials*, vol 81. Springer, Singapore – 2018. DOI [https://doi.org/10.1007/978-981-10-6895-9\\_](https://doi.org/10.1007/978-981-10-6895-9_)
  14. Mikhasev, G.I. Some Problems on Localized Vibrations and Waves in Thin Shells. In book: *Shell-like Structures. Advanced Theories and Applications*. – Springer. 2017. –Pp.149-209.
  15. Mikhasev, G., Bosiakov, S., Petrova, L., Maisyuk, M., Yurkevich, K. Assessment of Eigenfrequencies of the Middle Ear Oscillating System: Effect of the Cartilage Transplant. In book: “*Dynamical Systems: Theoretical and Experimental Analysis*” (ed.: J. Awrejcewicz), Vol. 181. –Springer. – 2016. –Pp. 243-254.